

1) Διθένηματα 2 ευθειών.

Έρώτημα: Να δωθει μια κοινή και αναγκαία συνθήκη ώστε η εξίσωση:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (*)$$

να περιγράφει ζεύγος ευθειών.

Θεώρημα: Η εξίσωση (*) περιγράφει ζεύγος ευθειών αν και μόνο αν:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση: $(A, C) \neq (0, 0)$. χωρίς βλάβη της γενικότητας ως υποθέτουμε ότι $A \neq 0$. Τότε γράφουμε την (*) ως εξίσωση 2^{ης} βαθμού ως προς x . Δηλαδή

$$Ax^2 + 2(BD + D)y + Cy^2 + 2Ey + F = 0$$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = 4 \{ (BD + D)^2 - A(Cy^2 + 2Ey + F) \} =$$

$$= 4 \{ (B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AE)y + D^2 - AF \}$$

Για να περιγράφει η (*) ζεύγος ευθειών θα πρέπει η Δ να είναι τέλειο τετράγωνο. Αυτό συμβαίνει όταν

$$0 = (BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF)$$

$$= -A \cdot \Gamma \iff \Gamma = 0$$

Περίπτωση: $(A, C) = (0, 0)$ κ' $B \neq 0$

Η εξίσωση (*) γράφεται ως:

$$(**) 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

σε αυτήν την περίπτωση

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & B & D \\ B & 0 & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = B(2ED - BF)$$

Θα δείξουμε ότι η (**) παριστάνει ζεύγος ευθειών αν και μόνο αν

$$2ED = BF$$

Προσληπτικά, η (**) γράφεται ως

$$2x(By + D) + \frac{2E}{B}(By + D) + \frac{BF - 2ED}{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x + \frac{2E}{B})(By + D) + BF - 2ED}{B} = 0$$

Από την τελευταία ιδιότητα βλέπουμε ότι η (**) παριστάνει ζεύγος ευθειών αν-ν.

$$BF = 2ED \Leftrightarrow \Gamma = 0 \quad \square$$

Παράδειγμα: Στο Οxy επίπεδο ως θεωρούσαμε την εξίσωση;

$$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + \lambda = 0$$

Να βρεθεί για ποιες τιμές λ παριστάνει ζεύγος ευθειών;

Λύση: Για να παριστάνει ζεύγος ευθειών θα πρέπει

$$\Gamma = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$$

Θεωρούμε την εξίσωση ως 2^ο βαθμια ως προς x και λύνουμε ως λύσεις

$$-3(y+1) \pm \sqrt{9(y+1)^2 - (y^2 + 2y + 1)} = -3(y+1) \pm 2\sqrt{2}|y+1|$$

$$= \begin{cases} (2\sqrt{2} - 3)(y+1) \\ -(2\sqrt{2} + 3)(y+1) \end{cases}$$

Επομένως η εξίσωση παίρνει την μορφή $2x$

$$O = \{ x - (2\sqrt{2} - 3)(y+1) \} \{ x + 13 + 2\sqrt{2})(y+1) \}$$

Επομένως, παριστάνει τις ευθείες

$$(ε_1) : x - (2\sqrt{2} - 3)(y+1) = 0$$

$$(ε_2) : x + 13 + 2\sqrt{2})(y+1) = 0$$

2.) Εφαπτομένη μιας 2^{ης} βαθμιας εξίσωσης :

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (*)$$

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης σε ένα σημείο $P_0(x_0, y_0)$ αυτής.

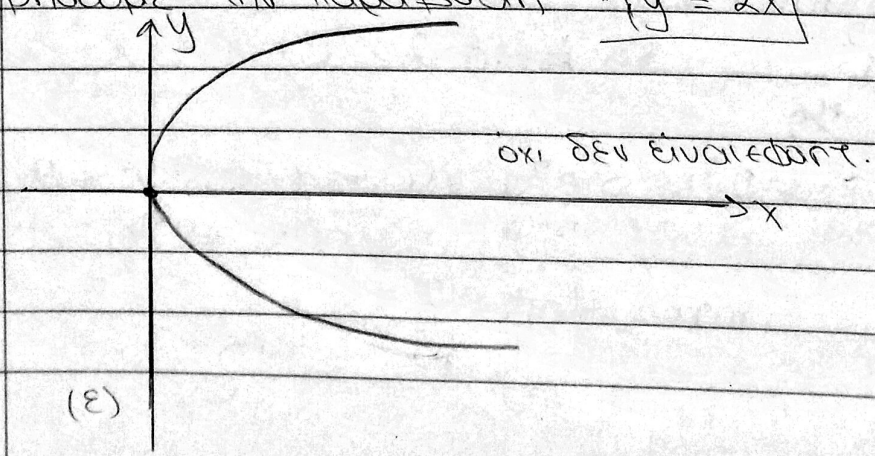
Ορισμός: Δίνεται η (*) με $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ η οποία δεν παριστάνει ζεύγος ευθειών. Έστω $P_0(x_0, y_0)$ σημείο της (*).

Μια ευθεία $(ε)$ από το P_0 με εξίσωση $ax + by + \gamma = 0$ ονομάζεται εφαπτομένη της (*) στο P_0 αν-ν το συν-τημα
$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ ax + by + \gamma = 0 \end{cases}$$

έχει το $P_0(x_0, y_0)$ ως διατεταγμένη λύση.

Σημείωση: Ο αριθμός αυτός αφορά μόνο καμπύλες 2^{ου} βαθμού στο $\mathbb{R}^2$.

Σημείωση: Δεν είναι αλήθεια ότι αν μια ευθεία $(ε)$ τέμνει την καμπύλη (*) σε ένα σημείο, τότε είναι και εφαπτομένη της καμπύλης. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την παραβολή $y^2 = 2x$



Η ευθεία $y=0$ και η παραβολή έχουν μόνο ένα κοινό σημείο αλλά δεν εφάπτεται της παραβολής
 Η εφάπτομένη της παραβολής είναι η ευθεία $\boxed{x=0}$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x = 0 \end{cases} \quad (0,0) \text{ διπλή λύση.}$$

Θεώρημα: Δίνεται η καμπύλη

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ με $(A,B,C) \neq (0,0,0)$. Η εξίσωση της εφαπ. στο $P_0(x_0, y_0)$ είναι:

$$Ax_0x + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x_0 + x) + E(y_0 + y) + F = 0$$

ή $(Ax_0 + By_0 + D)x + (Bx_0 + Cy_0 + E)y + Dx_0 + Ey_0 + F = 0$

Παράδειγμα: Δίνεται στο επίπεδο Oxy η εξίσωση.

$$5x^2 + 20xy + 20y^2 + 34x + 12y + 8 = 0$$

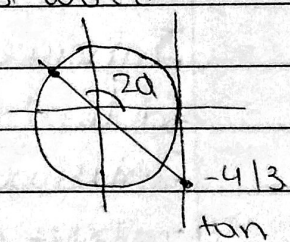
Να βρεθεί τι παρίσταται.

Λάμβουμε γραφή κατά γωνία ϕ , με ϕ έτσι ώστε

$$\tan 2\phi = \frac{2B}{A-C} \Rightarrow \tan 2\phi = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Έχουμε } 2\phi \in (\pi/2, \pi) \Rightarrow \phi \in (\pi/4, \pi/2)$$

$$\text{Τότε, } \tan 2\phi = \frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi} = -\frac{4}{3}$$



$$\Rightarrow 2\tan^2\phi - 3\tan\phi - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{2}{1} \Rightarrow \tan\phi = 2$$

$$\text{Συνεπώς, } \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = 2 \Rightarrow \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = 4 \Rightarrow \frac{1-\cos^2\phi}{1-\sin^2\phi} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{και} \quad \sin\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

↘

1.) Ελλειψοειδές: Μια επιφάνεια η οποία σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \quad a, b, \gamma \geq 0$$

▷ Ιδιότητες:

(i.) Εάν $a=b=\gamma=R$ τότε έχουμε σφαίρα

(ii.) Το κέντρο των αξόνων είναι κέντρο συμμετρίας. Αυτό σημαίνει ότι αν $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι σημείο του ελλειψοειδούς τότε και το $Q_0(-x_0, -y_0, -z_0)$ είναι σημείο του ελλειψοειδούς.

(iii.) Τμήμα με το Oxy επίπεδο είναι η καμπύλη
$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \text{'Ελλειψη!}'$$

(iv.) Τμήμα με $z=\lambda$ είναι η καμπύλη
$$\begin{cases} z=\lambda \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{ελλειψη, αν } |\lambda| < \gamma \\ \text{σημείο, αν } |\lambda| = \gamma \\ \emptyset, \text{ αν } |\lambda| > \gamma \end{cases}$$

(5)

v.) Ομοίως εξετάζουμε τμήμα με άλλα επίπεδα!

4

26/04/2018

2.) Μαρόκωνο υπερβολοειδές: Μια επιφάνεια που σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα έχει την μορφή:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \quad a, b, \gamma > 0.$$

Ιδιότητες:

i.) Έχουμε συμμετρία ως προς επίπεδα, άξονες συντεταγμένων και αρχή.

ii.) Ο άξονας Oz δεν τέμνει την επιφάνεια.

iii.) Τομή με επίπεδο $[Oxy]$:

είναι η καμπύλη $\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, έλλειψη!

iv.) Τομή με επίπεδο $[z=\lambda]$:

θα έχουμε $\begin{cases} z=\lambda \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \end{cases}$, έλλειψη!

v.) Τομή με επίπεδο $[x=0]$: $\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \end{cases}$, υπερβολή!

vi.) Τομή με επίπεδο $[y=\lambda]$:

είναι η καμπύλη $\begin{cases} y=\lambda \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \end{cases}$, υπερβολή!